ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 10

3.12 Переход от непрерывной системы к дискретной и обратный переход

Как мы уже говорили, одним из основных методов расчета дискретных систем является расчет сначала непрерывной системы традиционными методами, затем переход от непрерывной системы к дискретной. Мы рассмотрим последнюю задачу. Эта задача формулируется так: имеется дифференциальное уравнение или передаточная функция непрерывной системы. Требуется определить дискретную систему тех же размерностей такую, чтобы ее переменные в дискретные моменты времени были равны соответствующим переменным непрерывной системы при одинаковых входных воздействиях. Входные воздействия при этом считаются кусочно-постоянными. Они изменяются в моменты дискретизации.

Разработано несколько методов решения этой задачи, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Основные методы следующие:

1) Замена производных отношением приращений, а интегралов – суммой соответствующих переменных.

2) Применение таблицы z-преобразований.

3) Применение билинейного преобразования.

4) Решение непрерывного дифференциального уравнения между моментами отчета.

Рассмотрим коротко суть этих методов.

3.12.1 Замена производных отношением приращений, а интегралов – суммой переменных.

Производная есть отношение приращения независимой переменной к приращению времени при стремлении приращений к нулю. Тогда, считая, что разность независимой переменной x берется в моменты отчетов, можно записать

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T}\,. \tag{3.62}$$

Здесь $\Delta t = T$ – период дискретизации. Можно также получить формулу

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}\,. \tag{3.63}$$

Разность в числителе (3.62) называется обратной разностью, в (3.63) – прямой разностью. Используется как прямая, так и обратная разность.

Вторая производная есть отношение двойного приращения независимой переменной к приращению времени в квадрате при стремлении приращений к нулю. Имеем аналогично с применением обратной разности

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &\approx \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta t^2} = \frac{\Delta x(k) - \Delta x(k-1)}{\Delta t^2} = \\ &= \frac{(x(k) - x(k-1)) - (x(k-1) - x(k-2))}{\Delta t^2} = \frac{x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)}{T^2} \end{aligned} \tag{3.64}$$

Аналогично определяются выражения для замены производных более высокого порядка. Подставляя в исходное дифференциальное уравнение вместо производных их приближенные значения по (3.62) – (3.64) и выполняя преобразования, получаем разностное уравнение. Аналогичным образом интеграл заменяется суммой по методу прямоугольников

$$\int_0^t x(t)dx \approx \sum_{i=0}^{k} x(k-1)\Delta t = T\sum_{i=0}^{k} x(k-1).$$

Если непрерывная система задана в виде передаточной функции, то не обязательно его переводить в дифференциальное уравнение, нужно переменную s заменить ее приближенным выражением через z. Это выражение можно получить следующим образом. Выполним преобразование по Лапласу левой части и z-преобразование правой части выражения для обратной разности (3.62) (можно использовать и прямую разность (3.63))

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sx(s); \quad Z\left\{\frac{x(k)-x(k-1)}{\Delta t}\right\} = \frac{x(z)-x(z)z^{-1}}{\Delta t} = \frac{1-z^{-1}}{\Delta t}x(z) \quad .$$

Тогда можно записать, учитывая, что $\Delta t = T$

$$sx(s) \to\approx \frac{x(z)-x(z)z^{-1}}{\Delta t} = \frac{1-z^{-1}}{\Delta t}x(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}x(z), \tag{3.65}$$

где стрелка обозначает соответствие.

На основании (3.65) и можно записать, что

$$s \approx \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{zT} \quad . \tag{3.66}$$

Можно то же самое выражение получить по другому. Поскольку $z^{-1} = e^{-sT}$, то разлагая e^{-sT} в степенной ряд и удерживая два первых слагаемых ряда, получаем

$$z^{-1} = e^{-sT} \approx 1 - sT \text{, тогда } s \approx \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{zT} \tag{3.67}$$

Таким образом, удерживание двух первых слагаемых ряда соответствует замене производных отношением приращений. Соотношение (3.66) можно получить через звено интегрирования, тогда оно соответствует интегрированию методом прямоугольников.

Таким образом, порядок решения задачи зависит от вида исходного уравнения.

Если нужно преобразовать дифференциальное уравнение в дискретную форму, то порядок решения следующий:

1) Находим выражения для замены производных и интегралов в уравнениях.

2) Подставляем найденные выражения в исходное уравнение вместо производных и преобразуем полученное выражение к удобному виду.

Если исходной является передаточная функция, то нужно вместо s в передаточной функции подставить его приближенное значение по (3.62-1) и также привести полученное выражение к удобному виду.

Пример: имеем уравнение апериодического звена в виде обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, представленного в пространстве состояний

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = ax + bu \\ &y = cx \end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

Последнее из уравнений (3.65) называется уравнением выхода.

Требуется, используя замену производных уравнениях отношением приращений, преобразовать (3.65) в разностные уравнения.

Решение. Заменяем производную отношением приращений по (3.62), то есть, используя правые разности

$$\begin{aligned} &\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = ax(k) + bu(k) \\ &y(k) = cx(k) \end{aligned} \tag{3.69}$$

Производим преобразования над (3.69)

$$\begin{aligned} &x(k+1) = (a\Delta t + 1)x(k) + b\Delta t u(k) \\ &y(k) = cx(k) \end{aligned} \tag{3.70}$$

Обозначая $a\Delta t + 1 = g$, $b\Delta t = h$, получаем окончательно

$$\begin{aligned} &x(k+1) = gx(k) + hu(k) \\ &y(k) = cx(k) \end{aligned} \tag{3.71}$$

Как видно, получено представление дискретной системы также в пространстве состояний.

Пример, когда исходным уравнением является передаточная функция, рассмотрим позже.

Преимущество метода замены производных отношением приращений переменных – простота преобразований. Недостаток – малая точность преобразования. При увеличении периода дискретизации ошибка увеличивается.

3.12.2 Применение таблицы z-преобразований (Изерман, с. 62, 35, 516).

Этот метод включает в себя следующие этапы:

1) *представить непрерывную передаточную функцию в виде суммы простых дробей;*

2) *с помощью обратного преобразования Лапласа найти импульсную переходную функцию непрерывной системы w(t);*

3) *определить импульсную характеристику* $w(k)$ *дискретной системы путем дискретизации непрерывной импульсной функции w(t);*

4) *выполнить z-преобразование импульсной характеристики* $w(k)$ *в виде суммы ряда или применяя таблицу z-преобразований.*

Преимущество метода применения таблицы z-преобразований – это точный метод. Недостаток – сложность преобразований.

Пример 1

Дан интегратор с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{s}$$

Импульсная переходную функция $w(t)$ интегратора – это реакция на дельта-импульс. Интеграл от дельта-импульса есть константа, в данном случае 1, то есть

$$w(t) = 1, \text{ или } w(kT) = 1.$$

Тогда, используя таблицу z-преобразований, имеем

$$W(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Из последнего выражения видно, что интегратору в дискретной передаточной функции соответствует полюс, равный единице. Это значит, что наша дискретная система находится на границе устойчивости. Заметим, что в непрерывной системе этот полюс равен нулю и эта непрерывная система также на границе устойчивости.

Пример 2.

Дано апериодическое звено с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{1+Ts},$$

Это звено уже разложено на сумму простых дробей, здесь одно слагаемое. Приводим его к виду, удобному для определения импульсной переходной функции

$$W(s) = \frac{k}{1+T_0 s} = \frac{r}{s-(-p)}$$

Где $p = 1/T_0$, $r = k/T_0$.

Находим импульсную переходную функцию $w(t)$. Согласно (3.21) имеем

$$w(t) = re^{-pt}$$

Выполняем дискретизацию $w(t)$, для чего подставляем в нее $t = kT$

$$w(kT) = re^{-pkT}$$

Из таблицы z-преобразований находим дискретную передаточную функцию

$$W(z) = \frac{rz}{z-e^{pT}} = \frac{b}{1-e^{pT}z^{-1}}$$

3.12.3 Применение билинейного преобразования (преобразования Тастина)

Мы знаем, что переменная z связана с s показательной функцией $z = e^{sT}$, откуда

$$s = (\ln z)/T\ . \qquad (3.72)$$

Можно было бы подставить (3.72) в передаточную функцию аналоговой системы и получить $W(z)$. Но получившаяся трансцендентная функция совершенно не приспособлена для реализации цифровыми системами. Требуется, чтобы при переходе из s-области в z-область дробно-рациональный характер функции (отношение полиномов) сохранился. Для этого нужно, чтобы связь z с s была также в виде дробно-рациональный функции. Мы уже находили такую связь в виде представления экспоненты e^{-sT} первыми двумя слагаемыми ее разложения в степенной ряд в виде $z^{-1} = e^{-sT} \approx 1 - sT$. Более точное соотношение получается, если предварительно представить экспоненту в виде отношения двух экспонент, отличающихся разными знаками показателей степени. Затем разложить каждую из этих экспонент в степенной ряд (получается ряд Паде) и также взять первые два слагаемых. Это записывается так:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}. \qquad (3.73)$$

Из (3.73) получаем

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT} \qquad (3.74)$$

инверсное по отношению (3.74) выражение имеет вид

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \qquad (3.75)$$

Преобразование (3.74, 3.75) *называется билинейное преобразование или преобразование Тастина*. Теперь, чтобы перейти из s-области в z-область, нужно вместо s в $W(s)$ подставить его значение по (3.75) и выполнить преобразование полученной $W(z)$ к удобному виду. Билинейное преобразование более точное, но оно обладает еще одним важным преимуществом, благодаря чему нашло широкое применение. Что это за преимущество? Установлено, что билинейное преобразование переводит левую полуплоскость в s-области в круг единичного радиуса в z-области. Таким образом, устойчивая аналоговая система дает также устойчивую дискретную систему. Кроме того, в этом случае частотные характеристики дискретной $W_д(\omega)$ и аналоговой $W_a(\omega)$ систем будут связаны лишь трансформацией частоты по формуле

$$W_д(\omega) = W_a\left(\frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)\ . \qquad (3.76)$$

На низких частотах, когда ωT значительно меньше единицы, тангенс примерно равен своему аргументу, так что

$$\frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega T}{2}\right) \approx \omega \text{ при } \omega T \prec\prec 1.$$

Поэтому в области низких частот (до частоты Найквиста) частотные характеристики дискретного и аналогового фильтров почти совпадают (рисунок 6.1).

Если задана верхняя частота аналоговой системы ω_{0a}, то для получения дискретной системы с такой же верхней частотой $\omega_{0д}$ нужно скорректировать частотный масштаб так, чтобы

$$\omega_{0a} = \frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega_{0д} T}{2}\right) \quad . \tag{3.77}$$

Метод билинейного преобразования находит широкое применение для исследования дискретных систем аналоговыми методами, в частности, для исследования устойчивости.

Преимущества применения метода билинейного преобразования – простота преобразований, сохранение устойчивости преобразованной системы. Недостаток – искажение частотной оси на высоких частотах.

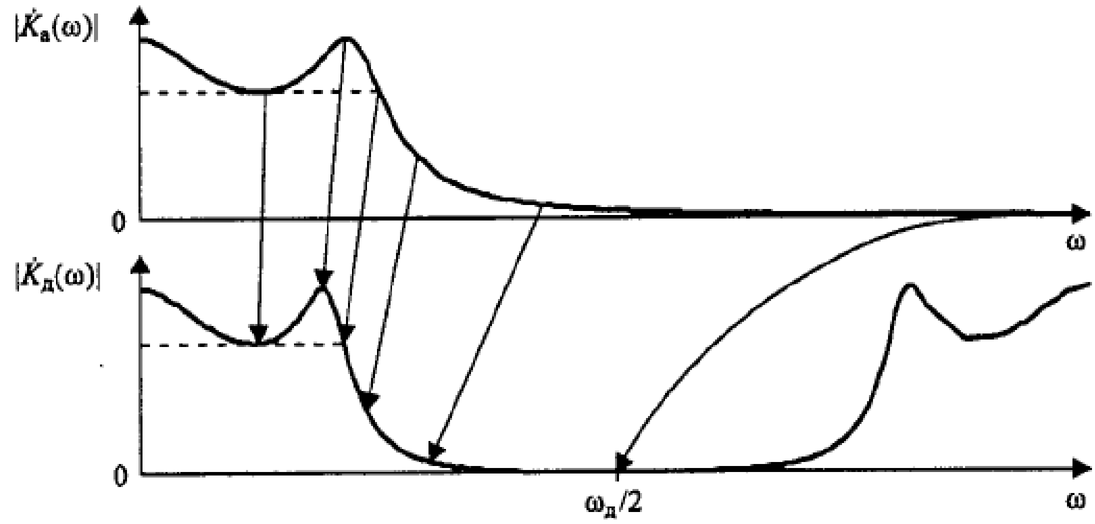

Рисунок 6.1 – Трансформация частотной оси при билинейном преобразовании

3.12.4 Решение непрерывного дифференциального уравнения между моментами отчета (Изерман, с. 49).

Этот метод нашел наибольшее применение, когда для преобразования используется ЭВМ. *Идея метода заключается в том, что на каждом шаге дискретизации решается дифференциальное уравнение в течение времени от начала до конца шага*. В качестве начальных условий берется решение уравнения в конце предыдущего шага. Для этого используем формулу общего решения дифференциального уравнения. Этот метод удобно применять для уравнений, представленных в пространстве состояний. Если представить уравнение системы в векторно-матричном виде (3.65)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}\right\}, \tag{3.78}$$

где x, u, y – векторы; A, B, C – матрицы соответствующих размерностей, то решение уравнения (3.78) имеет вид

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-A(t_k-\tau)} Bu(\tau) d\tau \, . \tag{3.79}$$

По этому уравнению, зная $x(t_k)$, можно определить точное значение $x(t_{k+1})$ в момент времени t_{k+1}. В итоге также получим точное уравнение дискретной системы

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{3. 80}$$

В Острем, с. 48-51 приведены преобразования и примеры.

Преимущества метода решения дифференциального уравнения – точность преобразований, приспособленность к решению на ЭВМ. Недостаток – сложность вычислений.

Часто нужно выполнять обратную операцию – перейти от дискретной системы к непрерывной.

Такую операцию нужно проделать, если, например, нужно исследовать устойчивость дискретной системы методами анализа непрерывных систем.

Аналогично методам прямого преобразования, здесь также используется несколько методов. Но наибольшее применение имеет метод билинейного преобразования (соответствует третьему методу прямого преобразования). По этому методу используется уже знакомое нам соотношение (3.74)

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT} \tag{3.74}$$

Теперь, чтобы перейти из z -области в s - область, нужно вместо z в $W(z)$ подставить его значение по (3.75) и выполнить преобразование полученной $W(s)$ к удобному виду. Итак: *для перехода от дискретной системы к непрерывной наиболее широко используют метод билинейного преобразования.*